ナヴィエ=ストークス方程式の特異性と乱流の小規模構造(乱流場の特異性と統計理論)

中野, 徹

数理解析研究所講究録
606巻 1987年 78-85

ナヴィエ＝ストークス方程式の特異性と乱流の小規模構造

中大理工物理　　中野　徹

§1. Introduction

実験並びに計算機シミュレーションによると乱流には構造がある事が明らかになり、最近はこの方面の研究が盛んになってきた。構造がなければ乱流にあらずといったことか。一方、乱流の統計理論ではその統計的性質を取り扱う関係上あまり構造といったことには関心を払わなかった。しかし、統計理論を扱う人が、乱流はのっぺりしたものと考えていたわけではない。もし乱流において構造といったものが大切ならば、それを取入れた統計理論も必要となるであろう。私の話は、それに目標を置いた初歩的な試みについてである。

流れの場に構造が現れる具体的な例として、ここでは二つ考える。一つは、Taylor-Green（Ref.1）の問題である。$t=0$で滑らかな流れを初期値にして、オイラー方程式の数値解を求めると、時間がたつにつれて小さなスケールの構造が現れてくる。時間の発展と共に構造のスケールはますます小さくなっていく。有限時間のうちに、最小のスケールはゼロになるのではないかと推測されている。未だ確定的ではないし、留保的な意見もあるが、Morf, Orszag, Frisch（Ref.2）はゼロに近づく速さを表す量として、構造のスケールを表す速度の空間微分の p 次

モーメント（p次エンストロピー）が有限時間t_*で発散するに際しての指数を求めた。この特異的な性質への近づき方を決めているのは、流体方程式の非線形性であることは間違いない。粘性の影響はどこに入って来るであろうか。構造のスケールが小さくなると粘性が効き始めるはずであるから、粘性はt_*の前から効き出すので、その場合は特異的なことは何も起こらずにt_*を過ぎてしまう。また構造が現れてもそれらは減衰してしまう。これが定常的な乱流に対応すると考えてもよかろう。この考え方は、Brachet 等のシミュレーション（Ref.3）に具体的に現れている。彼らは、同じ初期値に対して、オイラー方程式と、ナヴィエ＝ストークス方程式の両方を解いた。t_*までの両者の解は大体同じであり、特異点に収束の傾向がある。オイラー方程式ではそれ以上の解は求まらないが、ナヴィエ＝ストークス方程式ではその時刻をすぎて、新たな状態になる。エネルギースペクトルはt_*まではコルモゴロフスペクトルより急であるが、t_*以降ではそれに近づいて来るように見える。

$ 2．Model

乱流中には種々の波数の乱れがある。その波数空間をb（大体2のオーダー）の大きさで分割をする。即ちn番目のバンドは$b^n \leq kL < b^{n+1}$の波数に対応する。ここで、Lは最大渦のサイズである。nバンドで揺らいでいる速度を$x_n(t)$とすれば、

ナヴィエ＝ストークス（またはオイラー）方程式をモデル化することによって、x_nで書ける。Siggia（Ref.4）はそのような一つのモデル方程式の数値解として、次のような形の解を発見した。

$$x_n = f(b^n(t_* - t))$$

ここで、f(s) は s ＝ A にピークを持ち、大きな s で減衰する関数である。この解は、パルスが波数空間を小さい方から大きな方へ伝播する様を表している。そして t_* で波数は無限大になる。このパルス状態のパターンが t_0（大きな渦の寿命のオーダー）で繰り返す。しかしながら、これを用いて間欠性の指数を計算すると実験で観測されているものよりも大きくなりすぎる。言い換えれば Siggia の解は間欠性がつよすぎる。しかしこの解の興味のある点は、その解が決定論的に決り、構造を持っていることである。

我々のモデル（Ref.5）は上の解を少し修正したものである。即ち $x_n(t)$ が

$$x_n = b^{(z-1)n} f(b^{zn}(t_* - t))$$

の形を持つと仮定する。ここで f は動的なスケーリング関数である。z はパラメターであり、その値は方程式の非線形項の結合定数の形から出て来る筈である。Siggia の場合は z が 1 になっている。我々は z が 1 より小さいと仮定する。この動的なスケーリング関数を用いると波数空間でのエネルギー束が計算

されるが、このスケーリング関数のピークの部分が与えるエネルギー束は、$z=1$では波数に依らないが、$z<1$では波数と共に小さくなる。したがって、関数fがピークのみを持つことは、$z<1$ではありえない。我々のモデルは、関数$f(s)$が、（1）$s=A$でピークを持つ、（2）大きなsでベキで減衰する、で特徴づけられると仮定する。

このモデルの物理的内容を少し考えてみる。小さな波数のみを持つある初期値から出発すると、それに伴う波数は、関数fのピークの部分が記述するように、どんどん大きくなる。もし粘性がなければ、$t=t_*$で波数が無限大になる。すなわちエンストロピーが発散する。揺らぎの波数が無限大に近づく速さは、zの大きさで決定される。この状況は、Taylor-Green の問題の解に対応する。一方、粘性があれば、その影響で波数が無限大になることなく、$x_n(t)$はt_*を越える。時間がたつにつれて、ピークが現れたり、それが減衰したりする。もし絶えず揺らぎを小さな波数領域に注入すると定常的な状態が得られる。これが定常乱流に対応すると考えられる。そこでは、ピークの部分が乱流の構造を表し、間欠性の源になる。

$3. Singularity in Euler equation

Morf, Orszag, Frisch（以下では、MOF と略する）は滑らかな初期値に対するオイラー方程式の解から得られた一般化され

たエンストロピー $\Omega_p(t) = \langle (\partial u / \partial x)^{2p} \rangle$ が

$$\Omega_p(t) \sim (t_*-t)^{-\gamma_p}$$

のように発散するとした時、指数 γ_p は

$\gamma_1=0.8\pm0.1$, $\gamma_2=4.2\pm0.3$, $\gamma_3=9.9\pm0.5$, $\gamma_4=16\pm1$

で与えられることを示した。

我々のモデルを用いると、$\Omega_p(t)$ は次のように計算できる。n バンドのエネルギースペクトラムは

$$E_n(t) = b^{2(z-1)n} f^3(b^{zn}(t_*-t))$$

であるので、

$$\Omega_p(t) = \sum_n b^{2pn} E_n(t)$$
$$\sim (t_*-t)^{-2(z-1+p)/z}$$

となる。この結果とMOFの値と比べると、次の様な条件の下では良い一致が得られる。詳細は Ref.5 にゆずって、結論のみを書くと

（1）特異性は空間全体に発展するのではなくて、面状に発展する、

（2）$p=1$ の場合は、エネルギーカスケードがきくが、$p \geq 2$ では、ヘリシティカスケードが重要になる、

となる。（1）の結論は、Brachet らのシミュレーション (Ref.3) と矛盾するものではない。

§ 4. Intermittency Exponents

発達した乱流が間欠的な性質を持つことはよく知られている。定量的に言えば、間欠性の程度はコルモゴロフのスケーリングからのずれとして表される。具体的には、第一に速度の構造関数として次の様に表される。

$$\langle u(r)^p \rangle \sim r^{p/3}(L/r)^{y_p}$$

ここで u(r) は r だけ離れた２点における速度の差の縦成分である。y_p を構造関数に関する指数と呼ぶことにする。第二に、半径 r の球にわたって平均された散逸量 ε_r のモーメントに関する指数が定義される。

$$\langle \varepsilon_r^p \rangle \sim (L/r)^{\mu_p}$$

第三に、r だけ離れた散逸量の相関関数である。

$$\langle \varepsilon(x)\varepsilon(x+r) \rangle \sim (L/r)^{\nu_p}$$

第四に、速度の導関数のモーメントに関するものである。

$$\langle (\partial u/\partial x)^{2p} \rangle / \langle (\partial u/\partial x)^2 \rangle^p \sim R_\lambda^{\alpha_p}$$

ここで、R_λ はレイノルズ数である。これら四つの指数は、不完全ながらも実験で求められている。例えば、構造関数に関しては Anselmet (Ref.6) らによって p ＝ １８まで求められている。

我々のモデルを用いて指数をどのように計算出来るかを示すために、構造関数を例に取る。p 次の構造関数 $D_p(r)$ は上の x_n を用いて、

$$D_p(r) \sim \langle x_n^p \rangle = b^{p(z-1)n} \langle f^p (b^{zn}(t_* - t)) \rangle$$

と書ける。ここで $b^n = L/r$ であり、<>は時間平均を表す。pが大きくなれば、関数fのピークの寄与が支配的になり、時間平均は b^{-zn} となる。一方pが小さいと関数fのベキ減衰の部分の寄与が大きくなる。f(s) が $s^{-\gamma}$ のように減衰すると仮定すれば、時間平均の項は $b^{-\gamma pzn}$ となる。γはどう決められるべきか。nバンドへのエネルギーの伝達率がnに依らないとの条件から

$$\gamma = 1 - 2/3z$$

と決定される。これを用いると、構造関数の指数 y_p は

$$y_p = \begin{cases} 0 & \text{for } p \le p_c \\ (3z-2)(p-p_c) & \text{for } p > p_c \end{cases}$$

のようにクロスオーバーを示す。ここで、 p_c は

$$p_c = 1/\gamma = 3z/(3z-2)$$

である。Anselmet らの実験と比較すれば、z を 0.84 と選べば、良い一致が得られることが分かる。その他の指数に関しては Ref.7 を参照されたい。そこでは、log-normalモデルと βモデルの予測値も同時に詳しく比較されている。

$ 5 . Conclusion

以上で、オイラー方程式における特異性の問題と、乱流の間欠性にの問題に我々のモデルを適用した。実験との比較はそんな

に悪くない。間欠性の問題に対しては２、３のモデルが考えられているが、未だ満足な解決が得られていないと言っても良いであろう。その意味から言って、我々のモデルは将来の乱流の理解のうえで有用ではないかと思っている。

参考文献

1. G.I. Taylor and A.E. Green, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A158 (1937), 499.
2. R.H. Morf, S.A. Orszag and U. Frisch, Phys. Rev. Lett. 44 (1980), 572.
3. M.E. Brachet, D. Meiron, S.A. Orszag, B. Nickel, R. Morf and U. Frisch, J. Fluid Mech. 130 (1983), 411.
4. E.D. Siggia, Phys. Rev. A17 (1978), 1166.
5. T. Nakano and M. Nelkin, Phys. Rev. A31 (1984), 1980.
6. T. Nakano, Progr. Theor. Phys. 73 (1984), 629.
7. F. Anselmet, Y. Gagne, E.J. Hopfinger and R.A.Antonia, J. Fluid Mech. 140 (1984), 63.
8. T.Nakano, Progr. Theor. Phys. 75 (1986), No.6.